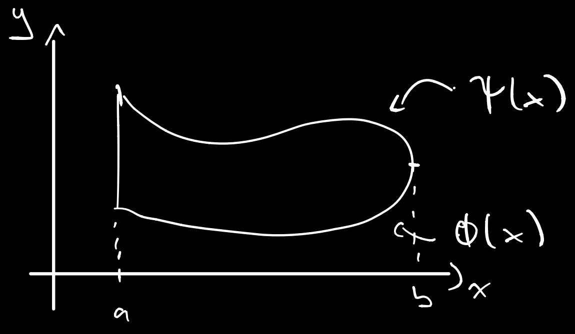
Übungsstunde Analysis 2:

Heutige Themen:

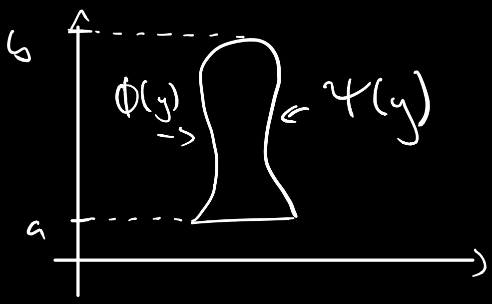
- Integration über Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$
  - ↳ Oberflächen, Linien, ...
- Differentiation unter dem Integralzeichen

Klarstellung Definition einfache Bereiche:

y-einfach: $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \Phi(x) \leq y \leq \Psi(x)\}$



x-einfach: $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b,\ \Phi(y) \leq x \leq \Psi(y)\}$



Bem: Die Definition ist im Prinzip abiträr, wichtig ist nur, dass jeder vom selben spricht. In der Praxis wählt man immer die einfachere Option. Es wird einem nie vorgeschrieben, wie man das Integral über einen Bereich berechnen soll.

Aufgabe 7.4.a)

$$\int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$$

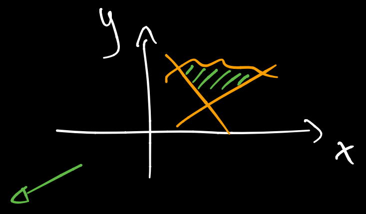
1) Integrationsbereich aufschreiben: $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{-x\le}_{(2)}\underbrace{y\le 2-x^2}_{(1)}, -1\le x\le 2\}$

Bem: Dies ist immer der erste Schritt, da man so zu der typischen Aufgabenstellung gelangt, von der aus man nun die Integrationsintervalle (frei) wählen kann. Vergesst nicht, dass nicht jede Menge als x- & y-einfache Bereich dargestellt werden kann

2) Ungleichungen umformen:

(1) $y\le 2-x^2 \iff x^2\le 2-y \iff \underline{-\sqrt{2-y}\le x\le \sqrt{2-y}}$

(2) $-x\le y \iff \underline{-y\le x}$



$$\Rightarrow \underline{\max(-y,-\sqrt{2-y})\le x\le \sqrt{2-y}}$$

3) Schnittpunkte der Grenzen berechnen

$$-y=-\sqrt{2-y}$$

$$y^2=2-y$$

Achtung falsche Lösungen

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$(y+2)(y-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \underline{1} \;,\; \underbrace{y_2 = -2}_{\text{falsche Lösung}}$$

4) Grössere Funktion pro Intervall finden

$$y=0: \qquad \begin{aligned} -y &\gtrless -\sqrt{2-y} \\ 0 &> -\sqrt{2} \end{aligned} \quad \left.\right\} \quad \begin{aligned} -y &> -\sqrt{2-y} \quad y \le 1 \\ -y &< -\sqrt{2-y} \quad y > 1 \end{aligned}$$

5) Bereich der anderen Variabel herausfinden:

$-x \le y \le 2-x^2$ mit $-1 \le x \le 2$

↳ Max & Min von y finden:

$$\underline{-2 \le y \le 2}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} \int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\, dy\, dx = \int_{-2}^{1} \int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\, dx\, dy$$

$$+ \int_{1}^{2} \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\, dx\, dy$$

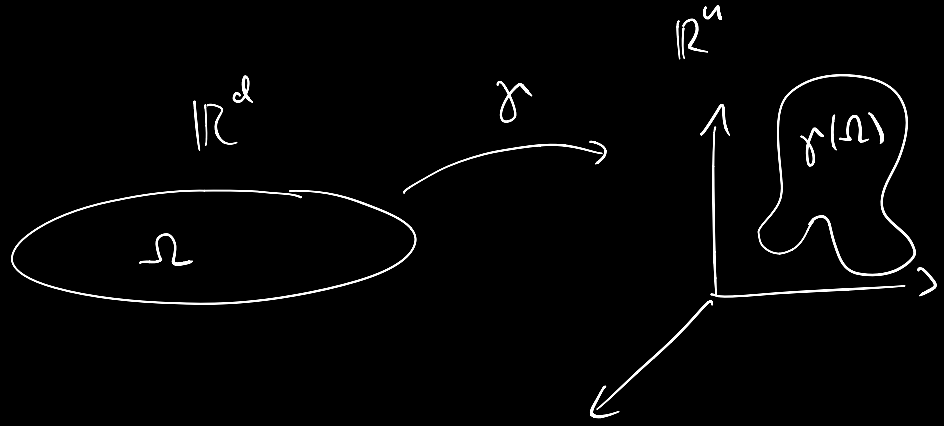
Integration über Untermannigfaltigkeiten:

Reguläre Parameterdarstellung:

Def: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, und $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abb. $(d \leq n)$. Dann heisst γ Immersion, falls $d\gamma(u) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist $\forall u \in \Omega$ (dh. $d\gamma(u)$ hat vollen Rang $\forall u \in \Omega$).

Ω heisst Parameterbereich

$\gamma(\Omega)$ heisst Spur von γ



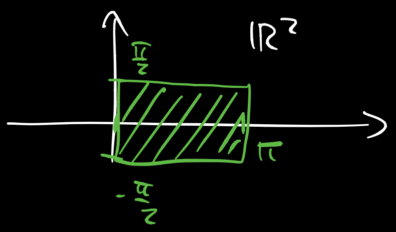
Bem: Wie ihr sehen könnt, vereinigen wir hier eigentlich einfach den Transformationssatz mit unserer Theorie über Untermannigfaltigkeiten?

Bsp: ▹ $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$

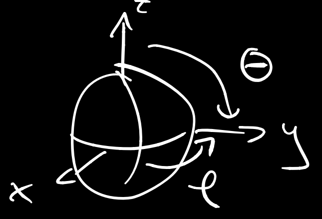
▹ Sphäre: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\Omega = (0,\pi) \times (0,2\pi)$$

$$(\Theta, \varphi)$$



$$\gamma(\Theta,\varphi) = R\begin{bmatrix} \sin\Theta\cos\varphi \\ \sin\Theta\sin\varphi \\ \cos\Theta \end{bmatrix}$$



, R = Radius

$\Rightarrow$ Spw $= \gamma(\Omega)$: Sphäre mit Radius R ohne Nord- & Südpol

$\Rightarrow$ Egal, da die beiden Punkte Nullmengen sind!

Berechnung der Integrale:

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine UMF der Dimension d. Wir wollen das Integral über M erklären:

Def: Eine M-offene Teilmenge $U \subset M$ heisst Kartengebiet, wenn es eine offene Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^n$ gibt und eine Karte $\varphi: U' \to V \subset \mathbb{R}^n$ mit $U = U' \cap M$. In diesem Fall kann man immer eine Parameterdarstellung von U finden:

$$\begin{cases} \Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \}d \\ \}n-d \end{matrix} \in V \right\} \\ \gamma: \Omega \to U \end{cases}$$

$$\gamma(u) = \varphi^{-1}(u,v)$$

Def: $f: U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heisst dann integrierbar über U, falls das folgende Integral existiert.

$$\boxed{\int_U f \, \underset{\overset{\uparrow}{\text{"Suface"}}}{dS} = \int_\Omega f(\gamma(u)) \underset{\text{neu}}{\boxed{\sqrt{g^\gamma(u)}}} \, du}$$

mit $g^\gamma(u) = \det[\gamma'(u)^T \cdot \gamma'(u)]$ die Gramsche Determinante.

Bem: Für zweidimensionale UMF gilt

$$\sqrt{g^\gamma(u)} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}\gamma(x_1,x_2) \times \frac{\partial}{\partial x_2}\gamma(x_1,x_2)\right\|_2$$

Bsp:

1) Eindimensionale Kartengebiete (insb. Länge einer Kurve):

Sei $\Omega = I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ eine Einbettung/Immersion, $M = \gamma(I)$.

$$g^\gamma = \det(\dot\gamma(I)^T \dot\gamma(I)) = \dot\gamma(I)^T \dot\gamma(I) = \|\dot\gamma(I)\|_2^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\int_M f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\dot\gamma(t)\|_2 \, dt}}$$

Bogenelement "$ds = \|\dot{\gamma}(t)\|_2 \, dt$"

$\hookrightarrow$ (Bogen-) Länge der Kurve

$$\underline{\underline{\int_M 1 \, ds = \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_2 \, dt}}$$

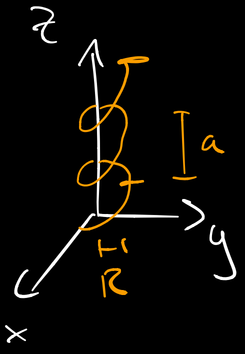
▷ Umfang Einheitskreis: $\gamma : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \underline{1}$$

$$\Rightarrow \int_M 1 \, ds = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

▷ Länge einer Helix: $\gamma : (0, 4\pi) \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \begin{bmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ at \end{bmatrix}$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \\ a \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \underline{\sqrt{R^2 + a^2}}$$



$$\Rightarrow \int_M 1 \, ds = \int_0^{4\pi} \sqrt{R^2 + a^2} \, dt = \underline{\underline{4\pi \sqrt{R^2 + a^2}}}$$

2) Zweidimensionale Kartengebiete (Insb. Oberflächen)

⇒ Integration über eine Sphäre

$$S^3_R = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = R^2 \right\}$$

Kugelkoordinaten mit $r = R$ konstant.

Parametrisierung der Sphäre ohne Nord- & Südpol:

$$\gamma : \underset{\theta}{(0,\pi)} \times \underset{\varphi}{(0,2\pi)} \to S^3_R \subset \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(\theta,\varphi) = R \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \gamma'(\theta,\varphi) = R \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma'^T \cdot \gamma' = R^2 \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$= R^2 \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix} = R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow g^\gamma = \det(\gamma'^T \cdot \gamma') = R^4 \sin^2\theta \quad \Rightarrow \sqrt{g^\gamma} = \underline{R^2 \sin\theta}$$

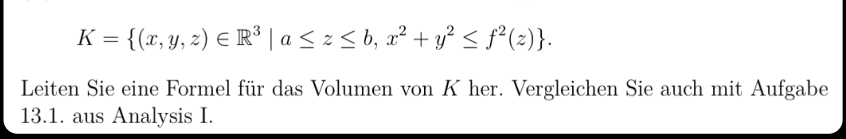
Alternative:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial\theta}\gamma \times \frac{\partial}{\partial\varphi}\gamma \right\|_2 = \underline{R^2 \sin\Theta}$$

Könnt ihr als Übung gerne selbst nachrechnen?

$$\Rightarrow \int_M f(x,y,z)\, dS = \underline{\underline{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \overbrace{f(R\sin\Theta\cos\varphi, R\sin\Theta\sin\varphi, R\cos\Theta)\, R^2\sin\Theta}\, d\varphi\, d\Theta}}$$

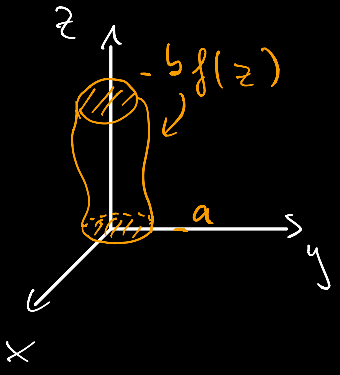
Kleiner Einschub zur Herleitung von Rotationskörpern:



(b) Sei nun f eine differenzierbare Funktion mit $f(z) > 0$, $a < b$ und

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b,\ x^2 + y^2 \leq f^2(z)\}.$$

Leiten Sie eine Formel für das Volumen von K her. Vergleichen Sie auch mit Aufgabe 13.1. aus Analysis I.



→ Nutzen Zylinderkoordinaten aufgrund der Symmetrie bzgl. der z-Achse

$$T(r,\varphi,z): \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix}, \quad T'(r,\varphi,z) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\det T'| = \underline{r}$$

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b,\ x^2+y^2 \leq f(z)^2\}$$

i) $y=0$: $x^2 \leq f(z)^2 \iff -f(z) \leq x \leq f(z)$

ii) $x^2+y^2 \leq f(z)^2 \iff -\sqrt{f(z)^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{f(z)^2-x^2}$

$$\Rightarrow \int_a^b \int_{-f(z)}^{f(z)} \int_{-\sqrt{f(z)^2-x^2}}^{\sqrt{f(z)^2-x^2}} g(x,y,z)\, dy\, dx\, dz$$

$$= \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(z)} \underbrace{g(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)}_{1}\, r \; dr\, d\varphi\, dz$$

da Volumen

$$= \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(z)} 1 \cdot r \; dr\, d\varphi\, dz$$

$$= \int_a^b \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{f(z)} d\varphi\, dz$$

$$= \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} f(z)^2 \; d\varphi\, dz$$

$$= \pi \int_a^b f(z)^2\, dz$$

Differentiation unter dem Integralzeichen:

i) Leibnizsche Regel:

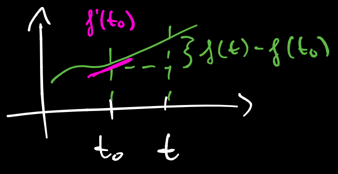
Unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_B f(x,t)\, d\mu(x) = \int_B \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, d\mu(x)$$

Beweis: Definieren $\Phi(t) = \int_B f(x,t)\, d\mu(x)$

Betrachten nun ein fixes t_0, dann gilt für alle t in der Nähe von t_0:

$$\Phi(t) - \Phi(t_0) = \int_B f(x,t)\, d\mu(x) - \int_B f(x,t_0)\, d\mu(x)$$



$$= \int_B \left[f(x,t) - f(x,t_0) \right] d\mu(x)$$

Annahme, dass t sehr nahe an t_0! Steigung ändert sich fast nicht!

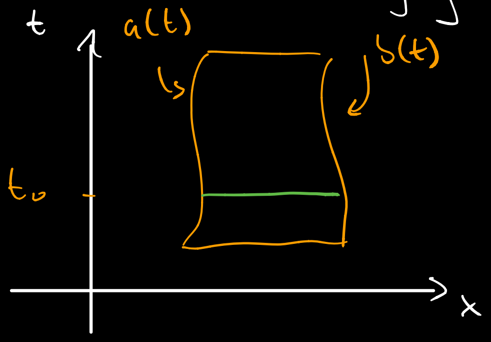
$$= \int_B \left[\frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0) \cdot (t - t_0) \right] d\mu(x)$$

$$\Rightarrow \underline{\Phi'(t_0)} = \frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0} = \underline{\int_B \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0)\, d\mu(x)} = \frac{d}{dt} \int_B f(x,t_0)\, d\mu(x)$$

□

ii) Leibnizsche Regel mit Extras:

→ Falls Integrationsbereich B von t abhängig ist?



Bsp: $\Phi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx$

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = f(b(t),t)\,b'(t) - f(a(t),t)\,a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$$

Beweis:

Wir betrachten $F(a,b,c) = \int_a^b f(x,c)\,d\mu(x)$

und $r(t) = (a(t), b(t), t)$

$$\Rightarrow \Phi(t) = F(r(t))$$

Somit gilt mit der Kettenregel sofort

$$\left.\begin{aligned}\Phi'(t) = {} & \frac{\partial}{\partial a} F(a(t), b(t), t)\frac{d}{dt}a(t) \\ & + \frac{\partial}{\partial b} F(a(t), b(t), t)\frac{d}{dt}b(t) \\ & + \frac{\partial}{\partial c} F(a(t), b(t), t)\frac{d}{dt}t\end{aligned}\right\}(*)$$

Mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung folgt aber auch direkt

$$\frac{\partial}{\partial a} F(a(t), b(t), t) = \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b f(x,c)\, d\mu(x) \Big|_{\substack{a=a(t)\\ b=b(t)\\ c=t}} = -f(a,c)\Big|_{\substack{a=a(t)\\ c=t}}$$

$$= \underline{-f(a(t),t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} F(a(t), b(t), t) = \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b f(x,c)\, d\mu(x) \Big|_{\substack{a=a(t)\\ b=b(t)\\ c=t}} = f(b,c)\Big|_{\substack{b=b(t)\\ c=t}}$$

$$= \underline{f(b(t),t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial c} F(a(t), b(t), t) = \frac{\partial}{\partial c} \int_a^b f(x,c)\, d\mu(x) \Big|_{\substack{a=a(t)\\ b=b(t)\\ c=t}}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial c} f(x,c)\, d\mu(x) \Big|_{\substack{a=a(t)\\ b=b(t)\\ c=t}} = \underline{\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) d\mu(x)}$$

und somit folgt aus $(*)$

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\, d\mu(x) = f(b(t),t)\, b'(t) - f(a(t),t)\, a'(t)$$

$$\underline{\underline{+ \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, d\mu(x)}} \qquad \square$$

Bsp: Berechne $\frac{d}{dt} \int_t^{t^{3/2}} \log(tx)\,dx$

i) Direkt: $\int \log(tx)\,dx = \underline{\underline{x \log(tx) - x + C}}$

(Berechnung: $1 \cdot \log(tx)$ part. integrieren)

$$\Rightarrow \int_t^{t^{3/2}} \log(tx)\,dx = t^{3/2} \log(t^{5/2}) - t^{3/2} - t \log(t^2) + t$$

$$= \frac{5}{2} t^{3/2} \log(t) - 2t\log(t) + t - t^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_t^{t^{3/2}} \log(tx)\,dx = \frac{15}{4} t^{1/2} \log(t) + \frac{5}{2} t^{1/2} - 2\log t - 2$$

$$+ 1 - \frac{3}{2} t^{1/2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{15}{4} t^{1/2} \log(t) + t^{1/2} - 2\log(t) - 1}}$$

ii) Leibnizsche Regel mit Extras:

$$\frac{d}{dt} \int_t^{t^{3/2}} \log(tx)\,dx = \log(t^{5/2}) \frac{3}{2} t^{1/2} - \log(t^2)$$

$$+ \int_t^{t^{3/2}} \frac{1}{t}\,dx$$

$$= \frac{15}{4} t^{1/2} \log(t) - 2\log(t) + \left[\frac{x}{t} \right]_t^{t^{3/2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{15}{4} t^{1/2} \log(t) - 2 \log(t) + t^{1/2} - 1}}$$